

## МЯГКОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

**И. В. Трундаев**

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва, Россия  
ivan\_t98@mail.ru

**Аннотация.** *Актуальность и цели.* Рассматривается проблема управления экономической системой, представленной нелинейной моделью, в условиях неопределенности. *Материалы и методы.* Экономическая система описывается нелинейной моделью, включающей случайный фактор и управляющее воздействие со стороны государства. В рамках этой модели построены алгоритмы управления на основе экспертных знаний, направленные на обеспечение сбалансированного и устойчивого развития. *Результаты.* Проведены исследование предложенной динамической модели, описывающей циклы в экономике, и сравнительный анализ алгоритма управления с использованием четкого и нечеткого алгоритмов управления. *Выводы.* Выделены определенные преимущества предложенного нечеткого алгоритма управления нелинейной модели на основе экспертных знаний, что может быть полезно при разработке управления системами большей размерности, где использование классических методов может быть недостаточно обоснованно или целесообразно.

**Ключевые слова:** нелинейная модель, мягкое управление, нечеткая логика, нечеткие множества, регулирование в экономике, экспертные системы

**Для цитирования:** Трундаев И. В. Мягкое управление нелинейной экономической системой // Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. 2025. № 1. С. 84–100. doi: 10.21685/2227-8486-2025-1-7

## SOFT CONTROL OF A NON-LINEAR ECONOMIC SYSTEM

**I.V. Trundaev**

Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russia  
ivan\_t98@mail.ru

**Abstract.** *Background.* The paper considers the problem of managing an economic system represented by a nonlinear model under conditions of uncertainty. *Materials and methods.* The economic system is described by a nonlinear model that includes a random factor and a controlling influence from the state. Within the framework of this model, expert knowledge-based management algorithms are built to ensure balanced and sustainable development. *Results.* A study of the proposed dynamic model describing cycles in the economy and a comparative analysis of the control algorithm using precise and fuzzy control algorithms are carried out. *Conclusions.* Certain advantages of the proposed fuzzy control algorithm for a nonlinear model based on expert knowledge are highlighted, which can be useful in developing control systems of higher dimension, where the use of classical methods may not be sufficiently justified or appropriate.

**Keywords:** nonlinear model, soft control, fuzzy logic, fuzzy sets, regulation in economics, expert systems

**For citation:** Trundaev I.V. Soft control of a non-linear economic system. *Modeli, sistemy, seti v ekonomike, tekhnike, prirode i obshchestve = Models, systems, networks in economics, technology, nature and society*. 2025;(1):84–100. (In Russ.). doi: 10.21685/2227-8486-2025-1-7

### ***Введение***

Известно множество моделей экономических циклов [1]. Существуют работы, где в циклах могут возникать различные стохастические возмущения [2, 3]. Соответственно, в зависимости от целей выбирается некоторое управление для адекватной обработки стохастики [4]. Такие возмущения используются для моделирования систем, которые основаны на экономических предположениях, допускающих наличие неопределенности при взаимодействии элементов системы.

Иногда целесообразнее выбирать нечеткие вычисления, когда в модели подразумевается такая неопределенность, которая делает затруднительным или невозможным использование аппарата теории вероятностей для построения удовлетворительного управления. В частности, стоит отметить следующие методы, которые часто используются в работах, включающие регулирование экономических систем: нечеткие правила и нечеткие регуляторы [5, 6].

В настоящей работе исследована динамическая модель экономической системы с фактором, подверженным неопределенности. Управление системой осуществляется через государственное воздействие. Предложены алгоритмы управления, в том числе с нечеткой логикой, на основе экспертных знаний о нелинейной модели. Проведен сравнительный анализ предложенных алгоритмов. Выявлены определенные преимущества мягкого управления.

Результаты исследования будут полезны для разработки управляющих алгоритмов в других моделях не только схожего класса, но и в моделях большей размерности.

### ***Нелинейная модель экономической системы***

Рассмотрим динамическую модель деловых циклов Гудвина. Предпосылками модели являются следующие предположения:

- 1) устойчивый технический прогресс;
- 2) устойчивый рост численности рабочей силы;
- 3) только два фактора производства – труд и капитал;
- 4) все величины реальные, т.е. уже учитывается влияние инфляции, и «нетто», когда промежуточные доходы и расходы вычитаются из конечного годового объема производства;
- 5) вся заработная плата потребляется, вся прибыль сохраняется и инвестируется;
- 6) соотношение капиталовложений и выпуска постоянно;
- 7) реальная ставка заработной платы повышается по мере приближения к полной занятости [7].

Оставаясь в целом в рамках указанных предположений, модифицируем некоторые из них, делая модель более реалистичной.

Так, мы допускаем, что численность населения может не только расти, но и монотонно убывать или быть вовсе неизменной.

Далее, существуют факторы, которые сложно учесть и смоделировать при расчете роста инвестиций. На скорость изменения могут влиять ожидания экономических субъектов, способы финансирования инвестиций в основной капитал, различные экономико-политические события. С учетом этого в описании инвестиционного процесса мы включим неопределенность.

Наконец, на реальную ставку заработной платы может воздействовать государство. Этот фактор мы также включаем в предлагаемую модель.

В итоге получаем следующую систему уравнений:

$$a = a_0 e^{\alpha t}, \quad (1)$$

$$N = N_0 e^{\beta t}, \quad (2)$$

$$I = \dot{K} = (Y - wL) - \delta K - \frac{\varepsilon K}{\lambda} = (1 - \omega)Y - \delta K - \frac{\varepsilon K}{\lambda}, \quad (3)$$

где  $a$  – показатель производительности труда, количество единиц продукции на одного работника в год;  $a_0$  и  $\alpha$  – положительные постоянные;  $N$  – общая численность рабочей силы;  $N_0$  (положительная) и  $\beta$  – константы;  $I$  – инвестиции за вычетом амортизации;  $K$  – капитал (точки над переменными в этой формуле и далее будут показывать производные по времени);  $Y$  – объем производства за год;  $w$  – реальная заработная плата на единицу рабочей силы;  $L$  – количество занятых работников;  $\delta$  – постоянная норма амортизации;  $\omega$  – доля заработной платы в экономике ( $\omega > 0$ );  $\lambda$  – уровень занятости ( $\lambda > 0$ );  $\varepsilon$  – коэффициент потери, который отображает убыток в инвестициях из-за ожиданий экономических субъектов или способа финансирования.

Будем считать, что  $\varepsilon$  меняет свое значение через промежуток времени  $\Delta t_\varepsilon$  и что данные по  $\varepsilon$  получены из нормального распределения  $N(\mu, \sigma^2)$ . При отсутствии различного рода неопределенностей в инвестициях в данном случае приемлемо, что исследовано в работах [8–10].

Все показатели выше и далее являются функциями от времени  $t$  (кроме постоянных).

Будем считать  $(1 - \omega)$  долей чистой прибыли.

Величина

$$v = \frac{K}{Y} \quad (4)$$

постоянна.

Далее, будем считать, что изменение зарплаты происходит не только под влиянием экономических факторов, но и регулируется государством.

Таким образом, имеем

$$\frac{\dot{w}}{w} = \Phi(\lambda) + \frac{u}{\omega}, \quad (5)$$

где  $\Phi(\lambda)$  – возрастающая функция Филлипа [7];  $u$  – управляющее воздействие со стороны государства на темпы изменения реальной заработной платы на единицу рабочей силы.

Воздействие можно произвольно менять через промежуток времени  $\Delta t$ . Государственная политика и ее влияние на реальные заработные платы и на долю заработной платы в экономике были исследованы в некоторых работах [11, 12].

Уровень занятости  $\lambda$  представим как отношение

$$\lambda = \frac{L}{N}. \quad (6)$$

Используем производственную функцию Леонтьева для описания объема производства с использованием (4):

$$Y = \min \left\{ \frac{K}{v}, aL \right\}. \quad (7)$$

Полагая полное использование капитала, получим равенство между аргументами  $\min$  (7):

$$Y = \frac{K}{v} = aL. \quad (8)$$

Из формулы (3) имеем

$$\frac{wL}{Y} = \omega. \quad (9)$$

Подставляя (8) в (9), получаем долю заработной платы в экономике  $\omega$  как отношение заработной платы на единицу рабочей силы к производительности труда:

$$\omega = \frac{w}{a}. \quad (10)$$

Дифференцируя формулу (8) по времени, можно найти темпы роста выпуска. Далее, комбинируя формулы (3) и (8), получаем

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{K}}{K} = \frac{(1-\omega)Y - \delta K - \frac{\varepsilon K}{\lambda}}{vY} = \frac{1-\omega}{v} - \delta - \frac{\varepsilon}{\lambda}. \quad (11)$$

Определим темп изменения доли заработной платы, дифференцируя выражение (11):

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} = \frac{\dot{w}}{w} - \frac{\dot{a}}{a}. \quad (12)$$

Дифференцируя (1) и (2), получаем

$$\frac{\dot{a}}{a} = \alpha, \quad \frac{\dot{N}}{N} = \beta. \quad (13)$$

Подставим (5) и (13) в (12):

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} = \Phi(\lambda) - \alpha + \frac{u}{\omega}, \quad (14)$$

где  $\Phi(\lambda)$  – возрастающая функция Филлипса.

Дифференцируя (6), найдем темпы изменения уровня занятости:

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \frac{\dot{L}}{L} - \frac{\dot{N}}{N}. \quad (15)$$

Дифференцируя  $L$  из (8) по времени, найдем следующее:

$$\frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{a}}{a}.$$

Подставим в (15) формулы (11) и (13), тогда

$$\frac{\dot{L}}{L} = \frac{1-\omega}{v} - \delta - \alpha - \frac{\varepsilon}{\lambda}. \quad (16)$$

Подставим (13) и (16) в (15):

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{N}}{N} = \frac{1-\omega}{v} - \alpha - \beta - \delta - \frac{\varepsilon}{\lambda}. \quad (17)$$

Из (14) и (17), выражая  $\dot{\omega}$  и  $\dot{\lambda}$ , составляем систему

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = \lambda \left( \frac{1-\omega}{v} - \alpha - \beta - \delta \right) - \varepsilon, \\ \dot{\omega} = \omega (\Phi(\lambda) - \alpha) + u. \end{cases} \quad (18)$$

#### Постановка задачи

Как покажем далее, у системы (18) при отсутствии управляющего воздействия  $u$  может быть особая точка «неустойчивый фокус». Тогда время, которое требуется для прохождения по фазовой траектории из некоторой точки  $A$  с положительными координатами в точку  $B$  с хотя бы одной нулевой координатой, конечно. Обозначим данное время как  $T$ .

Пусть  $T_{Alg}$  – минимальное время, которое требуется системе (18) в фазовом пространстве, чтобы пройти из начального положения  $A$  в такую конечную точку  $B$ , что нарушается условие  $\lambda, \omega > 0$ , при таком алгоритме управления, что  $\sum_{t=0}^{T_{Alg}} |u| \neq 0$ .

Необходимо выбрать такое управление воздействием  $u$ , чтобы  $T_{Alg} \rightarrow \max$  при  $T_{Alg} > T$ . Если есть несколько алгоритмов, которые дают одинаковое время существования системы  $T_{Alg}$ , то более эффективным будет считаться тот, у которого  $\sum_{t=0}^{T_{Alg}} |u|$  меньше.

Проблема в работе сводится к нахождению алгоритма, который увеличит «время жизни» системы (18) при заданных ограничениях. Возникает экстремальная задача. При прочих равных будет отдаваться предпочтение тому управлению, которое минимизирует затраты государства на экономическое воздействие.

Будем считать, что правительство соразмерно тратит средства на управляющее воздействие  $u$ . Чем больше  $u$ , тем больше тратит своих ресурсов государство.

Решение данной задачи имеет определенные перспективы. Прогнозирование и предотвращение кризисных явлений является одной из важнейших проблем, стоящих перед любым правительством, а адекватное и соразмерное реагирование на возникающие экономические угрозы является приоритетным при выборе стратегии регулирования экономики.

### *Материалы и методы*

#### *Поведение экономической системы*

Модель (18), как и нелинейная модель Гудвина, представлена схематично. Вообще говоря, доля заработной платы может не влиять явно на занятость, а реальные зарплаты, где мы и задали управляющее воздействие, могут влиять на безработицу непрямо. Достаточно сослаться на работу [13], где во второй главе Кейнс говорит о том, что, возможно, работники в своих требованиях исходят из минимума денежной, а не реальной заработной платы: «...если предложение труда является функцией одной лишь реальной заработной платы, то кривая предложения труда должна изменяться с каждым изменением цен».

Но данная модель имеет определенные перспективы, так как относительно простые уравнения позволяют выявить некоторые общие закономерности. На основании нелинейной модели (18) далее будет продемонстрировано использование нечеткого управления для повышения времени жизни экономической системы при возникновении некоторого случайного фактора. Данное управление может быть использовано при разработке алгоритмов воздействия в более сложных моделях.

В качестве  $\Phi(\lambda)$  будем использовать линейную функцию Филлипса

$$\Phi(\lambda) = -\varphi_0 + \varphi_1\lambda,$$

где  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  – положительные константы.

Поведение системы (18) без  $\varepsilon$  и  $u$  достаточно хорошо изучено (модель «хищник – жертва» Лотки – Вольтерра [14]). Если рассматривать начальную точку с положительными координатами, то ее можно классифицировать как «центр». Фазовый и кинетический портреты могут выглядеть так, как это представлено на рис. 1, 2.

При построении рис. 1, 2 использованы следующие значения параметров:

$$\alpha = 0,04; \beta = -0,13; \nu = 100; \delta = 0,01; \varphi_0 = 0; \varphi_1 = 0,01. \quad (19)$$

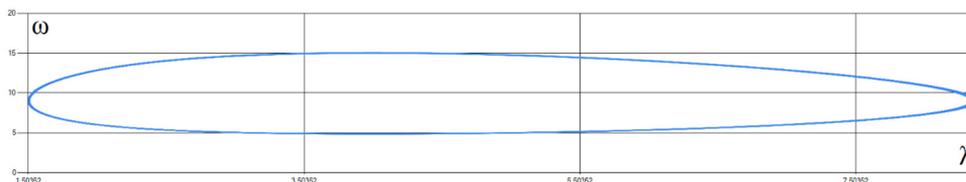


Рис. 1. Фазовый портрет уравнений Лотки – Вольтерра с начальной точкой (5,5)

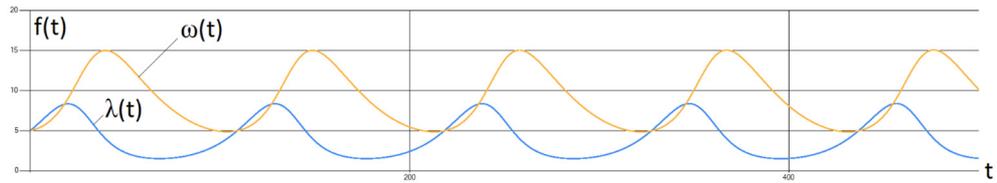


Рис. 2. Кинетический портрет уравнений Лотки – Вольтерра с начальной точкой (5,5)

Эти значения будут использоваться в примерах и в дальнейшем.

При появлении некоторого дополнительного фактора  $\varepsilon$  поведение системы может измениться. Исследуем особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = \lambda \left( \frac{1-\omega}{v} - \alpha - \beta - \delta \right) - \varepsilon, \\ \dot{\omega} = \omega (\varphi_1 \lambda - \varphi_0 - \alpha). \end{cases} \quad (20)$$

Для краткости положим

$$\frac{1}{v} - \alpha - \beta - \delta = k$$

и будем предполагать, что  $k > 0$ . Найдем особые точки. Решая систему

$$\begin{cases} \lambda \left( \frac{1-\omega}{v} - \alpha - \beta - \delta \right) - \varepsilon = 0, \\ \omega (\varphi_1 \lambda - \varphi_0 - \alpha) = 0, \end{cases}$$

получим первую и вторую точки

$$(\lambda, \omega)_1 = \left( \frac{\varepsilon}{k}, 0 \right), (\lambda, \omega)_2 = \left( \frac{\alpha + \varphi_0}{\varphi_1}, kv - \frac{\varphi_1 v \varepsilon}{\varphi_0 + \alpha} \right).$$

Используем якобиан системы

$$J(\lambda, \omega) = \begin{pmatrix} k - \frac{\omega}{v} & -\frac{\lambda}{v} \\ \varphi_1 \omega & \varphi_1 \lambda - \varphi_0 - \alpha \end{pmatrix}$$

для дальнейшего исследования.

Первая точка может быть либо неустойчивым узлом, либо седлом. Вид второй точки может быть классифицирован иначе.

Рассмотрим такую систему (20), у которой вторая точка будет неустойчивым фокусом. Покажем, что такая система будет при значении параметров (19) и некотором  $\varepsilon$ . Сейчас положим, что некоторый фактор  $\varepsilon$  не меняется со временем.

В общем случае характеристическое уравнение для второй точки принимает вид

$$\lambda^2 - \frac{\varphi_1 \varepsilon}{\varphi_0 + \alpha} \lambda + k(\varphi_0 + \alpha) - \varphi_1 \varepsilon = 0,$$

где  $\lambda$  – собственное значение.

Подставляя заданные параметры, найдем такие значения  $\varepsilon$ , при которых  $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$  и  $\operatorname{Im} \lambda_i \neq 0$ . При значениях параметров (19) значения  $\varepsilon$  находятся в объединении промежутков  $(-0,567; 0)$  и  $(0; 0,407)$ .

На рис. 3, 4 представлены фазовые и кинетические портреты системы (20) при  $\varepsilon = 0,02$ .

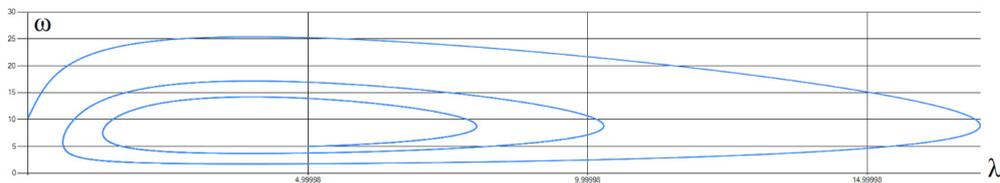


Рис. 3. Фазовый портрет уравнений (3) с начальной точкой (5,5)

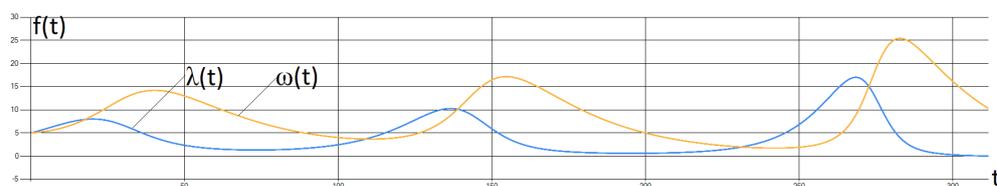


Рис. 4. Кинетический портрет уравнений (3) с начальной точкой (5,5)

Увеличение амплитуды колебаний приводит фазовую траекторию экономической системы в точку, нарушающую ограничения.

#### Управление

Рассмотрим систему (18). Можно оказывать воздействие через  $u$  на скорость изменения  $\omega$ , неявно регулируя  $\lambda$ . Для изменения управляющего воздействия алгоритм получает значения  $\lambda$  и  $\omega$  через  $\Delta t$ .

Реализуем управление в (18) на основе экспертных знаний о системе без фактора  $\varepsilon$  (см. рис. 1, 2).

Необходимо уменьшить амплитуду колебаний  $\lambda$ . Будем считать с некоторым упреждением, что  $\lambda$  должен находиться в интервале (3, 8). Значение  $\omega$  не должно сильно превышать  $\lambda$ . Нельзя понижать  $\omega$  до значения меньше 2.

Алгоритм управления в некоторый момент времени  $t$  (через промежуток  $\Delta t$ ) получает значения  $\lambda_t$  и  $\omega_t$ . На выход алгоритм выдает значение  $u$ .

Выход алгоритма  $u$  распределяется на полуинтервал времени  $D = [t, t + \Delta t)$  так, чтобы  $\int_t^{t+\Delta t-n} u(x) dx = u$  и  $\forall t_1, t_2 \in D (u(t_1) = u(t_2))$ .

#### Алгоритм A0

При отсутствии конкретного алгоритма управления будем считать  $u = 0$  (в дальнейшем такой подход будем называть A0).

#### Алгоритм A1

Сначала сформулируем правила управления отдельно на основе наших предположений.

Правило 1: если  $(\lambda_i < 3)$ , то  $u = -1$ .

Правило 2: если  $(\lambda_i < \omega_i)$ , то  $u = -1$ .

Правило 3: если  $(\lambda_i > 8)$ , то  $u = 1$ .

Объединим правила следующим образом, добавив ограничение  $(\omega_i > 2)$ .

Правило 4:

– если  $((\lambda_i < 3) \vee (\lambda_i < \omega_i)) \wedge (\omega_i > 2)$ , то  $u = -1$ ;

– иначе если  $(\lambda_i > 8)$ , то  $u = 1$ ;

– иначе  $u = 0$ .

#### Алгоритм А2

Фаззифицируем получаемые значения  $\lambda_i$  и  $\omega_i$ . Зададим посылки и заключения в импликациях (правило 1 – правило 2) как нечеткие множества. Применим нечеткие правила к входным значениям. Дефаззифицируем результат в  $u$ .

За фаззификацию примем процедуру преобразования действительного числа в нечеткое число (вычисляем степень принадлежности действительных чисел входным нечетким множествам). Под нечетким числом будем понимать нечеткое множество множества действительных чисел, которое обладает следующими свойствами: выпуклость, нормальность, ядро состоит только из одной точки (ядро – четкое подмножество области определения, содержащее все элементы, принадлежащие некоторому множеству со степенью, равной 1). За дефаззификацию примем преобразование нечеткого множества в действительное число (см. подробнее в работе [15]).

Фаззифицируем  $\lambda_i$  и  $\omega_i$ , где функции принадлежности построены на основе гауссовой функции

$$\mu_A(a) = e^{-\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad (21)$$

где  $A$  – нечеткое множество некоторого полученного значения;  $\mu$  – само полученное значение;  $\sigma = 1$ .

Пусть  $X$  – это фаззифицированное значение  $\lambda_i$ , а  $Y$  – фаззифицированное значение  $\omega_i$ .

Для работы с нечеткими правилами будем использовать импликацию Гогена

$$\xrightarrow{G} (A(x), B(y)) = \begin{cases} 1, & A(x) = 0, \\ \min\left(\frac{B(y)}{A(x)}, 1\right), & A(x) \neq 0, \end{cases} \quad (22)$$

где  $A$  и  $B$  – некоторые нечеткие множества.

#### Нечеткое правило 1

Пользуясь правилом 1 «если  $(\lambda_i < 3)$ , то  $u = -1$ », обозначим посылку «меньше 3» нечетким множеством  $L3$ , где функция принадлежности

$$\mu_{L3}(x) = (\text{arcctg}(x - 3)) / \pi.$$

Обозначим заключение в правиле 1 как нечеткое число  $U_{-2}$  с ядром  $-2$  и с функцией принадлежности (21). Под нечетким числом будем понимать нечеткое множество множества действительных чисел, которое обладает следующими свойствами: выпуклость, нормальность, ядро состоит только из одной точки.

Отношение на парах чисел  $x$  и  $u$  зададим через импликацию Гогена (22)

$$\mu_{\frac{L3, U_{-2}}{G}}(x, u) = \frac{\mu_{L3}(x) \mu_{U_{-2}}(u)}{G}.$$

Найдем нечеткое управляющее воздействие  $U$ , которое необходимо совершить, как образ данного отношения:

$$U = \frac{L3, U_{-2}}{G} \rightarrow (X). \quad (23)$$

Примем функцию

$$\mu_{\frac{L3, U_{-2}}{G}}(u) = \max_{x \in \mathbb{R}} \left( \mu_X(x) \mu_{\frac{L3, U_{-2}}{G}}(x, u) \right) = \max_{x \in \mathbb{R}} \left( \mu_X(x) \min \left( \frac{\mu_{U_{-2}}(u)}{\mu_{L3}(x)}, 1 \right) \right)$$

в качестве функции принадлежности множества  $U$ .

Подобную функцию принадлежности будем применять и в остальных нечетких правилах.

### Нечеткое правило 2

Введем в терминах нечетких множеств правило 2 «если  $(\lambda_i < \omega_i)$ , то  $u = -1$ », обозначив посылку « $\lambda$  меньше  $\omega$ » нечетким множеством  $X_Y$  со следующей функцией принадлежности:

$$\mu_{X_Y}(x) = \left( \arctg(x) + \frac{\pi}{2} \right) / \pi.$$

Обозначим заключение в правиле 2 как нечеткое число  $U_{-1}$  с ядром  $-1$ . В качестве аргумента передается разность нечетких чисел  $Y - X$ . Найдем нечеткое управляющее воздействие  $U$

$$U = \frac{X_Y, U_{-1}}{G} \rightarrow (Y - X). \quad (24)$$

Разность  $Y - X$  вычисляется на основе принципа расширения.

### Нечеткое правило 3

Введем условие  $(\omega_i > 2)$ . Зададим правило «если  $(\omega_i > 2)$ , то  $u = -1$ ». Обозначим посылку в таком правиле как  $B2$ , где функция принадлежности имеет вид

$$\mu_{B2}(x) = \left( \arctg(x - 2) + \frac{\pi}{2} \right) / \pi.$$

Обозначим заключение как нечеткое число  $U_{-1}$ . Найдем нечеткое управляющее воздействие  $U$

$$U = \frac{B2, U_{-1}}{G} \rightarrow (Y). \quad (25)$$

*Нечеткое правило 4*

Пользуясь правилом 3 «если  $(\lambda_i > 8)$ , то  $u = 1$ », обозначим посылку «больше 8» нечетким множеством  $B8$ , где функция принадлежности имеет вид

$$\mu_{B8}(x) = \left( \arctg(x - 8) + \frac{\pi}{2} \right) / \pi.$$

Обозначим заключение в правило 3 как нечеткое число  $U_1$  с ядром 1 с помощью (21). Найдем нечеткое управляющее воздействие  $U$

$$U = \frac{B8, U_1}{G} \rightarrow (X). \tag{26}$$

Объединим правила (23)–(26) следующим образом:

$$U = \left( \frac{L3, U_2}{G} \rightarrow (X) \vee \frac{XY, U_{-1}}{G} \rightarrow (Y - X) \vee \frac{B2, U_{-1}}{G} \rightarrow (Y) \right) \wedge \frac{B8, U_1}{G} \rightarrow (X). \tag{27}$$

За дизъюнкцию взята функция «максимум», за конъюнкцию – произведение.

Далее проводим дефаззификацию  $U$  методом центра тяжести, результат будет являться выходным значением алгоритма.

**Результаты**

Сравним время  $T$  «жизни» системы (18) без управления с управлением  $T_{A1}$  и с управлением  $T_{A2}$ . Для этого запустим несколько тестов, где сравним при прочих равных параметрах эффективность алгоритмов.

Будем считать алгоритм более эффективным, если время существования  $T_{Alg}$  системы с этим алгоритмом больше времени существования системы при ином алгоритме или при его отсутствии. В случае одинакового времени будем считать лучшим тот алгоритм, у которого  $\sum_{t=0}^{T_{Alg}} |u|$  меньше.

Полученные результаты можно проиллюстрировать численным экспериментом (основные расчеты были проведены на языке C# с использованием библиотеки [16]). Примем следующие значения параметров. Начальная точка (5,5). Максимальное время существования системы ограничим значением 500 и  $\Delta t_\varepsilon = 1$ . Будем считать, что  $\varepsilon$  не меняется внутри каждого теста, как и  $\Delta t$ . В первом тесте  $\varepsilon = 0,1$  и  $\Delta t = 1$ , далее в каждом тесте  $\varepsilon$  и  $\Delta t$  будем перебирать их значения с изменением 0,1. Отметим результаты в табл. 1, где значение 1 в ячейке показывает успешность алгоритма относительно остальных, а 0, соответственно, неэффективность соответствующего управления.

Таблица 1

Результаты сравнения алгоритмов при неизменном  $\varepsilon$  внутри теста

	$\Delta t=1$			$\Delta t=2$			$\Delta t=3$			$\Delta t=4$			$\Delta t=5$			$\Delta t=6$		
	A1	A2	A0															
$\varepsilon = 0$	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
$\varepsilon = 0,1$	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
$\varepsilon = 0,2$	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
$\varepsilon = 0,3$	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0
$\varepsilon = 0,4$	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0
$\varepsilon = 0,5$	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1
$\varepsilon = 0,6$	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
$\varepsilon = 0,7$	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
$\varepsilon = 0,8$	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
$\varepsilon = 0,9$	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
$\varepsilon = 1$	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
$\Sigma$	8	2	1	7	3	1	3	7	1	3	7	1	2	8	1	0	10	1

Обратим внимание, что при малых  $\Delta t$  эффективнее алгоритм A1. Однако при повышении  $\Delta t$  эффективность нечеткого алгоритма возрастает в сравнении с остальными. Когда информация приходит редко и мы не обладаем более полными знаниями о системе, нечеткая логика может оказаться предпочтительнее.

Проведем дополнительное тестирование. Используем все предыдущие параметры, но рассмотрим поведение алгоритмов, когда фактор  $\epsilon$  получен из нормального распределения  $N(\mu, \sigma^2)$ . Через  $\Delta t$   $\epsilon$  может менять свое значение.

Будем изменять  $\mu$  от 0 до 1 с шагом 0,1 и  $\sigma$  от 0 до 1 с таким же шагом, а также  $\Delta t$  от 1 до 3 с шагом 1. Запускать системы будем по несколько раз внутри каждого теста. Отметим результаты в таблицах, где значение в ячейке показывает количество успешных попыток алгоритма относительно остальных.

Рассмотрим поведение алгоритмов при  $\sigma = 0,1$ .

По табл. 2 видно, что по эффективности алгоритмы A1 и A2 почти схожи (при некотором преобладании A2). Сравним результаты, когда изменяется стандартное отклонение.

Таблица 2

Результаты сравнения алгоритмов при неизменном  $\sigma$

$\sigma = 0,1$	$\Delta t=1$			$\Delta t=2$			$\Delta t=3$			$\Delta t=4$			$\Delta t=5$			$\Delta t=10$		
	A1	A2	A0	A1	A2	A0												
$\mu=0$	0	2	8	0	2	8	0	2	8	0	2	8	0	2	8	0	0	10
$\mu=0,1$	0	10	0	0	10	0	0	10	0	0	10	0	2	8	0	0	8	2
$\mu=0,2$	5	5	0	0	10	0	0	10	0	5	5	0	4	6	0	0	10	0
$\mu=0,3$	1	9	0	4	6	0	3	7	0	7	3	0	8	2	0	0	9	1
$\mu=0,4$	7	3	0	7	3	0	4	5	1	9	1	0	8	2	0	0	10	0
$\mu=0,5$	7	3	0	6	4	0	2	8	0	5	5	0	0	8	2	1	7	2
$\mu=0,6$	5	5	0	4	6	0	0	8	2	2	6	2	1	6	3	1	7	2
$\mu=0,7$	4	5	1	3	5	2	2	6	2	2	6	2	2	6	2	2	5	3
$\mu=0,8$	5	2	3	4	2	4	4	2	4	4	2	4	3	2	5	3	2	5
$\mu=0,9$	6	1	3	5	1	4	5	1	4	4	1	5	3	1	6	3	1	6
$\mu=1$	4	3	3	4	3	3	4	3	3	4	3	3	4	3	3	4	3	3
$\Sigma$	44	48	18	37	52	21	24	62	24	42	44	24	35	46	29	14	62	34

По табл. 3 (когда обновлять управляющее воздействие  $u$  можно часто  $\Delta t = 3$ ) эффективность алгоритма A2 падает уже при небольшом стандартном отклонении, в то время как алгоритм A1 начинает успешнее работать.

По табл. 4 (при редком обновлении  $u$ ) не повторяется тенденция увеличения эффективности A2 при неизменном  $\epsilon$  (см. табл. 1), но все равно видно преимущество алгоритма A2 перед A1 и A0 на основе нечеткой логики даже при достаточно большом стандартном отклонении (в отличие от результатов табл. 3). Отмечается снижение эффективности при увеличении стандартного отклонения, что является естественным для многих алгоритмов.

Таблица 3

Результаты сравнения алгоритмов при неизменном  $\Delta t = 3$

$\Delta t=3$	$\sigma=0,1$			$\sigma=0,2$			$\sigma=0,3$			$\sigma=0,4$			$\sigma=0,5$			$\sigma=0,6$		
	A1	A2	A0															
$\mu=0$	0	2	8	0	6	4	0	9	1	3	7	0	5	5	0	6	4	0
$\mu=0,1$	0	10	0	3	7	0	6	4	0	7	3	0	10	0	0	8	2	0
$\mu=0,2$	0	10	0	10	0	0	8	2	0	6	4	0	8	2	0	5	3	2
$\mu=0,3$	3	7	0	5	5	0	4	5	1	4	5	1	5	3	2	7	2	1
$\mu=0,4$	4	5	1	4	5	1	6	2	2	7	2	1	7	1	2	5	2	3
$\mu=0,5$	2	8	0	4	5	1	4	5	1	4	5	1	5	4	1	6	2	2
$\mu=0,6$	0	8	2	2	5	3	1	6	3	3	3	4	3	3	4	4	3	3
$\mu=0,7$	2	6	2	4	3	3	3	4	3	4	3	3	4	3	3	4	2	4
$\mu=0,8$	4	2	4	4	2	4	4	2	4	5	2	3	3	4	3	3	4	3
$\mu=0,9$	5	1	4	4	1	5	3	4	3	3	4	3	3	3	4	4	3	3
$\mu=1$	4	3	3	3	4	3	3	3	4	3	3	4	3	3	4	3	4	3
$\Sigma$	24	62	24	43	43	24	42	46	22	49	41	20	56	31	23	55	31	24

Таблица 4

Результаты сравнения алгоритмов при неизменном  $\Delta t = 10$

$\Delta t=10$	$\sigma=0,1$			$\sigma=0,2$			$\sigma=0,3$			$\sigma=0,4$			$\sigma=0,5$			$\sigma=0,6$		
	A1	A2	A0															
$\mu=0$	0	0	10	1	3	6	3	1	6	3	2	5	4	3	3	3	3	4
$\mu=0,1$	0	8	2	2	6	2	1	4	5	1	6	3	1	5	4	1	3	6
$\mu=0,2$	0	10	0	0	9	1	0	7	3	2	4	4	0	5	5	0	3	7
$\mu=0,3$	0	9	1	0	7	3	0	6	4	0	5	5	0	6	4	2	4	4
$\mu=0,4$	0	10	0	0	9	1	0	7	3	1	5	4	2	4	4	2	4	4
$\mu=0,5$	1	7	2	4	4	2	3	4	3	3	4	3	3	5	2	3	4	3
$\mu=0,6$	1	7	2	2	6	2	2	6	2	1	6	3	2	5	3	3	5	2
$\mu=0,7$	2	5	3	3	4	3	3	4	3	3	4	3	4	3	3	4	3	3
$\mu=0,8$	3	2	5	3	2	5	4	2	4	4	2	4	3	4	3	2	5	3
$\mu=0,9$	3	1	6	4	1	5	3	4	3	3	4	3	3	3	4	4	3	3
$\mu=1$	4	3	3	3	4	3	3	3	4	3	3	4	3	3	4	3	4	3
$\Sigma$	14	62	34	22	55	33	22	48	40	24	44	42	25	46	39	27	41	42

Обсуждение

Для понимания результатов продемонстрируем следующие графики (рис. 5–7) поведения алгоритма A1 при  $\Delta t = 2$ ,  $\varepsilon = 0,1$  и неизменном  $\varepsilon$  (т.е. без распределения  $N(\mu, \sigma^2)$ ). Остальные параметры сохранены.

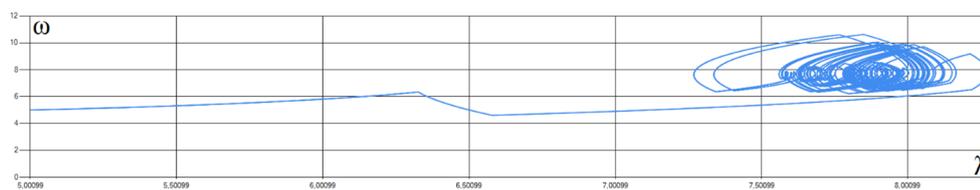


Рис. 5. Фазовый портрет уравнений (18) при неизменном значении  $\varepsilon$  и с алгоритмом A1

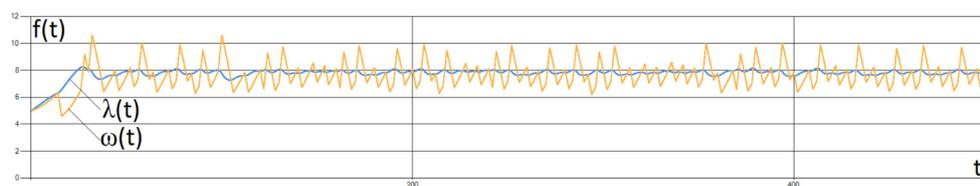


Рис. 6. Кинетический портрет уравнений (18) при неизменном значении  $\varepsilon$  и с алгоритмом A1

По фазовой траектории видно, что изменился характер циклов в экономике в системе (18) относительно системы (20). На рис. 6 наблюдаются резкие изменения  $\omega$  относительно  $\lambda$ . Такое поведение объясняется характером управления (рис. 7) – при малом изменении  $\lambda$  управляющее воздействие  $u$  серьезно меняет свое значение из-за строгих логических проверок в условии и дискретных значениях управляющего воздействия  $u$  ( $-1, 0$  или  $1$ ).

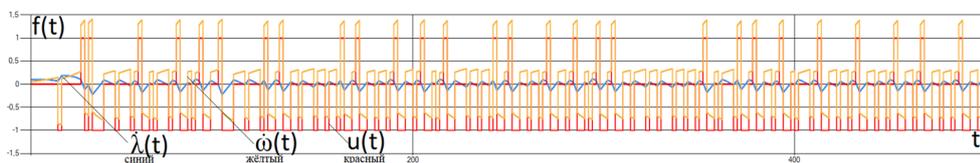


Рис. 7. Графики управляющего воздействия и производных  $\lambda$  и  $\omega$  уравнений (18) при неизменном значении  $\varepsilon$  и с алгоритмом A1

Рассмотрим теперь при тех же параметрах поведение алгоритма A2 (рис. 8–10).

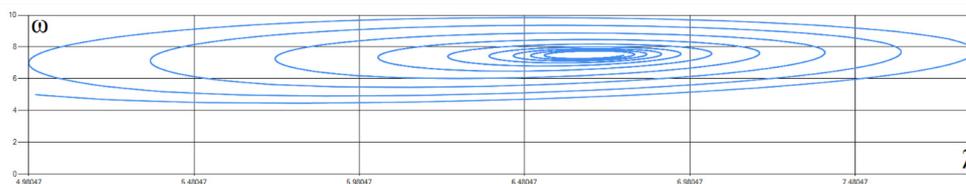


Рис. 8. Фазовый портрет уравнений (18) при неизменном значении  $\epsilon$  и с алгоритмом A2

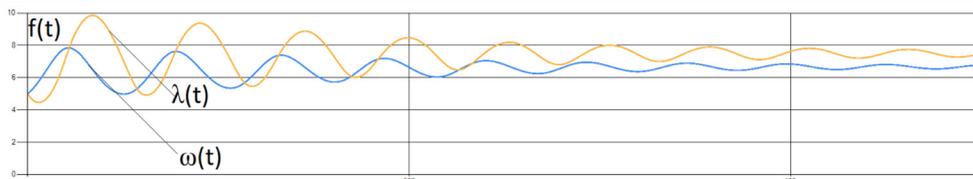


Рис. 9. Кинетический портрет уравнений (18) при неизменном значении  $\epsilon$  и с алгоритмом A2

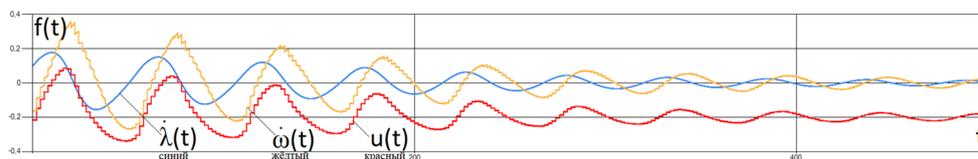


Рис. 10. Графики управляющего воздействия и производных  $\lambda$  и  $\omega$  уравнений (18) при неизменном значении  $\epsilon$  и с алгоритмом A2

По фазовой траектории видно, что появился устойчивый фокус. Благодаря управлению A2 колебания  $\lambda$  и  $\omega$  превращаются в затухающие, что делает невозможным перемещение фазовой траектории в точку остановки (где  $\lambda \leq 0$  или  $\omega \leq 0$ ). Это происходит из-за того, что алгоритм на основе мягкого управления изменяет  $u$  более плавно. Управляющее воздействие благодаря нечеткой форме записи правил позволяет адекватно реагировать на возникающий фактор  $\epsilon$ .

### Заключение

Способность адекватно реагировать на случайные изменения некоторых факторов является важной частью работы с экономическими системами в условиях неопределенности.

В данной работе показана нелинейная модель экономической системы, включающей в себя случайный фактор и управляющее воздействие со стороны государства. Для данной системы предложены алгоритмы управления на основе экспертных знаний о модели Гудвина. Был проведен сравнительный анализ алгоритмов управления на классической логике и на нечеткой.

Предложенные в данной работе алгоритмы управления экономической системой показывают определенные перспективы в управлении более сложными системами. Результаты численных экспериментов продемонстрировали

преимущества нечетких правил на основе экспертных знаний. Данные выводы сделаны на основе сравнения эффективности алгоритмов по времени удержания  $T_{Alg}$  фазовой траектории в допустимой области и по суммарным затратам со стороны государства  $u$ . Сравнительный анализ алгоритмов проводился при следующих различных параметрах: период корректировки управляющего воздействия, значение коэффициента потери  $\varepsilon$  как постоянная величина и как переменная (тогда дополнительно рассматривались следующие параметры: стандартное отклонение и математическое ожидание распределения данных по  $\varepsilon$ , промежуток времени  $\Delta t_\varepsilon$  изменения  $\varepsilon$ ).

Был разработан алгоритм, позволяющий давать соразмерный ответ на возникающие возмущения. Мягкие методы позволили не только увеличить «время жизни» экономической системы (18) при параметрах (19), но и уменьшить использование государственных средств.

Полученные результаты могут быть также интересны, когда необходимо осуществлять государственное регулирование экономической системой при ограниченных резервах.

### Список литературы

1. Cafferata A., Dávila-Fernández M. J., Sordi S. (Ir) rational explorers in the financial jungle: Modelling Minsky with heterogeneous agents // *Journal of Evolutionary Economics*. 2021. Vol. 31, № 4. P. 1157–1188.
2. Berger T., Hienzsch S. Which Global Cycle? A Stochastic Factor Selection Approach for Global Macro-Financial Cycles // *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*. 2024. doi: 10.1515/snde-2023-0093
3. Kang D. N., Marmer V. Modeling long cycles // *Journal of Econometrics*. 2024. Vol. 242, № 1. P. 105751.
4. Neck R., Blueschke D., Blueschke-Nikolaeva V. Optimal fiscal policy in times of uncertainty: a stochastic control approach // *Empirica*. 2024. P. 1–22.
5. Yakovenko I. Fuzzy stochastic automation model for decision support in the process inter-budgetary regulation // *Mathematics*. 2020. Vol. 9, № 1. P. 67.
6. Xie X., Chen Y. H. Robust control design for an uncertain macroeconomic dynamical system with unknown characteristics and inequality control constraint // *Complexity*. 2021. Vol. 2021, № 1. P. 8826480.
7. Goodwin R. M. A Growth Cycle: Socialism, Capitalism and Economic Growth // *Essays in economic dynamics*. London : Palgrave Macmillan UK, 1967. P. 165–170.
8. Jin Z., Liu G., Yang H. Optimal consumption and investment strategies with liquidity risk and lifetime uncertainty for Markov regime-switching jump diffusion models // *European Journal of Operational Research*. 2020. Vol. 280, № 3. P. 1130–1143.
9. Avramov D. [et al.]. Sustainable investing with ESG rating uncertainty // *Journal of financial economics*. 2022. Vol. 145, № 2. P. 642–664.
10. Alfaro I., Bloom N., Lin X. The finance uncertainty multiplier // *Journal of Political Economy*. 2024. Vol. 132, № 2. P. 577–615.
11. Drautzburg T., Fernández-Villaverde J., Guerron-Quintana P. Politics and Income Distribution // *Economic Insights*. 2022. Vol. 7, № 2. P. 11–18.
12. Paraje G. [et al.]. The effects of the Chilean food policy package on aggregate employment and real wages // *Food Policy*. 2021. Vol. 100. P. 102016.
13. Keynes J. M. The general theory of employment // *The quarterly journal of economics*. 1937. Vol. 51, № 2. P. 209–223.
14. Арнольд В. И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели. М. : МЦНМО, 2004. 32 с.

15. Пегат А. Нечеткое моделирование и управление. М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. 798 с.
16. Материалы для лекций по курсу AIML. URL: <https://github.com/air-labs/AIML> (дата обращения: 01.10.2024).

### References

1. Cafferata A., Dávila-Fernández M.J., Sordi S. (Ir) rational explorers in the financial jungle: Modelling Minsky with heterogeneous agents. *Journal of Evolutionary Economics*. 2021;31(4):1157–1188.
2. Berger T., Hienzsch S. Which Global Cycle? A Stochastic Factor Selection Approach for Global Macro-Financial Cycles. *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*. 2024. doi: 10.1515/snede-2023-0093
3. Kang D.N., Marmer V. Modeling long cycles. *Journal of Econometrics*. 2024; 242(1):105751.
4. Neck R., Blueschke D., Blueschke-Nikolaeva V. Optimal fiscal policy in times of uncertainty: a stochastic control approach. *Empirica*. 2024:1–22.
5. Yakovenko I. Fuzzy stochastic automation model for decision support in the process inter-budgetary regulation. *Mathematics*. 2020;9(1):67.
6. Xie X., Chen Y.H. Robust control design for an uncertain macroeconomic dynamical system with unknown characteristics and inequality control constraint. *Complexity*. 2021;2021(1):8826480.
7. Goodwin R.M. A Growth Cycle: Socialism, Capitalism and Economic Growth. *Essays in economic dynamics*. London: Palgrave Macmillan UK, 1967:165–170.
8. Jin Z., Liu G., Yang H. Optimal consumption and investment strategies with liquidity risk and lifetime uncertainty for Markov regime-switching jump diffusion models. *European Journal of Operational Research*. 2020;280(3):1130–1143.
9. Avramov D. et al. Sustainable investing with ESG rating uncertainty. *Journal of financial economics*. 2022;145(2):642–664.
10. Alfaro I., Bloom N., Lin X. The finance uncertainty multiplier. *Journal of Political Economy*. 2024;132(2):577–615.
11. Drautzburg T., Fernández-Villaverde J., Guerron-Quintana P. Politics and Income Distribution. *Economic Insights*. 2022;7(2):11–18.
12. Paraje G. et al. The effects of the Chilean food policy package on aggregate employment and real wages. *Food Policy*. 2021;100:102016.
13. Keynes J.M. The general theory of employment. *The quarterly journal of economics*. 1937;51(2):209–223.
14. Arnold V.I. «Zhestkie» i «myagkie» matematicheskie modeli = "Hard" and "soft" mathematical models. Moscow: MTsNMO, 2004:32. (In Russ.)
15. Pegat A. *Nechetkoe modelirovanie i upravlenie = Fuzzy modeling and control*. Moscow: BINOM. Laboratoriya znaniy, 2013:798. (In Russ.)
16. *Materialy dlya leksiy po kursu AIML = Materials for lectures on the AIML course*. (In Russ.). Available at: <https://github.com/air-labs/AIML> (accessed 01.10.2024).

### Информация об авторах / Information about the authors

**Иван Вячеславович Трундаев**  
аспирант кафедры математики  
и анализа данных,  
Финансовый университет  
при Правительстве  
Российской Федерации  
(Россия, г. Москва,  
Ленинградский пр-т, 49/2)  
E-mail: [ivan\\_t98@mail.ru](mailto:ivan_t98@mail.ru)

**Ivan V. Trundaev**  
Postgraduate student  
of the sub-department  
of mathematics and data analysis,  
Financial University  
under the Government  
of the Russian Federation  
(49/2 Leningradsky avenue,  
Moscow, Russia)

**Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов /  
The author declares no conflicts of interests.**

**Поступила в редакцию/Received 01.10.2024**

**Поступила после рецензирования/Revised 28.02.2025**

**Принята к публикации/Accepted 15.03.2025**